Wielkie liczby wokół nas

1. Jak sobie radzić z liczbami – olbrzymami i karzełkami?

Kiedy liczymy otaczające nas przedmioty i porównujemy ich wagę lub rozmiary, podajemy wyniki w postaci liczb. Mogą to być liczby całkowite, jak 1, 2, 5, lub 125, mogą to też być liczby ułamkowe podane w postaci zwykłej lub dziesiętnej, jak 1/2, 4/3, 1,3 lub 0,125. W tym drugim przypadku widzimy, że są wśród nich zarówno liczby większe, jak i mniejsze od jedynki. Zwykle jednak nie są one zbyt wiele razy mniejsze, ani większe, od jedynki.

Wynika to po prostu z możliwości naszych zmysłów. Jeśli nawet liczymy bardzo szybko, w ciągu godziny nie policzymy więcej, niż kilka tysięcy przedmiotów. Jeśli mierzymy długości dwóch prętów, stosunek ich długości też nie przekroczy zwykle podobnej wartości: nie umiemy zmierzyć długości znacznie mniejszej niż jeden milimetr, a nasz zasięg rąk nie przekracza dwóch metrów. Zatem w życiu codziennym rzadko spotykamy liczby mniejsze niż (powiedzmy) jedna stutysięczna lub większe niż sto tysięcy.

Jeśli nie porównujemy wagi (lub masy) albo rozmiarów dwóch przedmiotów, ale wyznaczamy je i wyrażamy w wybranych jednostkach, wynik zależy oczywiście od wyboru jednostek. Wybieramy je zwykle tak, aby otrzymać wynik między jedynką a setką. Nie mówimy więc, że kupujemy „pięćdziesiąt tysięcy gramów ziemniaków", tylko po prostu „pięćdziesiąt kilogramów ziemniaków"; nie wlewamy do wiadra „dziesięciu tysięcy centymetrów sześciennych wody", tylko „dziesięć litrów wody".

Aby objąć zakresem jednostek nie tylko rozmiary i masy otaczających nas przedmiotów, ale i obiekty mikroświata oraz ciała astronomiczne, ustalono prosty schemat nazw „jednostek pochodnych" wielokrotnie mniejszych lub większych od jednostki wyjściowej. Uzyskujemy je dodając przed nazwą jednostki przedrostek pochodzący z łaciny (dla ułamków jednostki wyjściowej) lub z greki (dla wielokrotności jednostki wyjściowej). Przedrostki te to:

decy (d): 0,1 = 10^{-1}	deka (da): 10 = 10^{1}
centy (c): 0,01 = 10^{-2}	hekto (h): 100 = 10^{2}
mili (m): 0,001 = 10^{-3}	kilo (k): 1000 = 10^{3}
mikro (μ): 0,000001 = 10^{-6}	mega (M): 1 000 000 = 10^{6}
nano (n): 0,000000001 = 10^{-9}	giga (G): 1 000 000 000 = 10^{9}
piko (p): 0,000000000001 = 10^{-12}	tera (T): 1 000 000 000 000 = 10^{12}
femto (f): 0,000000000000001 = 10^{-15}	peta (P): 1 000 000 000 000 000 = 10^{15}
atto (a): 0,000000000000000001 = 10^{-18}	eksa (E): 1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}
zepto (z): 0,000000000000000000001 = 10^{-21}	zetta (Z):1 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{21}
jokto(j): 0,000000000000000000000001 = 10^{-24}	jotta (Y):1 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{24}

Zatem bilion (milion milionów, czyli 10^{12}) gramów, to jeden teragram (Tg), a jedna miliardowa, czyli 10^{-9} metra, to jeden nanometr (nm). Podobnie tworzymy nowe jednostki np. czasu: jedna tysięczna sekundy to jedna milisekunda (ms), a także wszelkich innych wielkości fizycznych.

Nie wszystkie te jednostki są naprawdę praktycznie używane: nikt właściwie nie nazywa miliona gramów „megagramem", skoro istnieje tradycyjna nazwa „tona"; nikt też nie używa dla długich okresów czasu nazw dużych wielokrotności sekundy, bo stosujemy tradycyjnie minuty, godziny, dni i lata. Zwykle mówimy też „litr", a nie „decymetr sześcienny". Jednak dla wielu wielkości fizycznych wszystkie te przedrostki są naprawdę potrzebne i wykorzystywane.

Zwróćmy też uwagę na to, jak pożyteczny jest zapis potęgowy wielkich liczb. Tradycyjnego zapisu nie używamy praktycznie dla liczb większych od miliona (10^6), bo bardzo trudno dla nich uniknąć pomyłki bez żmudnego „liczenia zer”. Można oczywiście użyć nazw słownych, jakie utworzono dla całkowitych potęg tysiąca i miliona. Niestety do dziś Europa i Stany Zjednoczone używają tu różnych konwencji nazw, co grozi poważnymi nieporozumieniami. Odpowiednie nazwy zestawiono w poniższej tabelce:

Zapis potęgowy	Nazwa polska	Nazwa europejska	Nazwa amerykańska
10^6	milion	million	million
10^9	miliard	milliard	billion
10^{12}	bilion	billion	trillion
10^{15}			quadrillion
10^{18}	trylion	trillion	quintillion
10^{21}			sextillion
10^{24}	kwadrylion	quadrillion	septillion

Na paru przykładach zobaczymy, że tak wielkie liczby mogą pojawić się niespodziewanie w otaczającym nas „zwykłym” świecie.

2. Wielokrotne podwajanie

a) Zboże na szachownicy

Z czasów starożytnych przyszła do nas legenda o wynalazcy szachów, który upokorzył pysznego króla żądaniem pozornie skromnej nagrody za swój wynalazek: ziarenko zboża na pierwszym polu szachownicy, dwa na drugim, cztery na trzecim, osiem na czwartym i dalej aż do sześćdziesiątego czwartego pola na każdym dwukrotnie więcej, niż na poprzednim. Okazało się, że spichrze królestwa zawierają jedynie maleńką cząstkę żądanej nagrody.

Istotnie, oszacujmy liczbę żądanych ziarenek. W zapisie potęgowym możemy łatwo zapisać, że na *n*-tym polu należy położyć 2^{n-1} ziarenek (oczywiście $2^0 = 1$, a $2^1 = 2$). Suma liczb od 1 do 2^{63} to $2^{64} - 1$; łatwo tego dowieść mnożąc ją przez jedynkę zapisaną jako $1 = 2 - 1$ i używając wyprowadzonego w „Uzupełnieniu” podstawowego prawa mnożenia potęg

$$2^m \cdot 2^n = 2^{m+n},$$

z czego wynika w szczególności

$$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Wtedy każdy wyraz sumy 2^{n-1} pomnożony przez 2 da nam 2^n, a wyrazy pomnożone przez –1 zredukują się z nimi zostawiając w wyniku końcowym tylko dwa wyrazy:

$$(2-1) \cdot (1+2+4+8+\ldots+2^{62}+2^{63}) =$$
$$= 2+4+8+\ldots+2^{63}+2^{64}-1-2-4-8-\ldots-2^{63} = 2^{64}-1.$$

Jeśli nie chcemy korzystać z kalkulatora, możemy oszacować liczbę 2^{64} z niezłą dokładnością nawet w pamięci. Wystarczy obliczyć kilka pierwszych potęg dwójki:

$$2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024.$$

Zatem $2^{10} \cong 10^3$, a korzystając znów z prawa mnożenia potęg otrzymamy

$$2^{60} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cong 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 = 10^{18},$$

więc szukana liczba to w przybliżeniu

$$2^{64} = 2^4 \cdot 2^{60} \cong 16 \cdot 10^{18}.$$

Zakładając, że ziarenko zboża waży ok. 0,07 grama (do dziś używa się w krajach anglosaskich jednostki wagi o zbliżonej wartości i nazwie „grain”, czyli ziarenko) możemy oszacować masę żądanej ilości zboża na około 10^{18} grama, czyli bilion (milion milionów) ton. Dla porównania warto podać, że dzisiejsza światowa roczna produkcja zboża jest rzędu miliarda ton, czyli tysiąckrotnie mniejsza.

b) Składanie kartki

Każdy, kto składał kilkakrotnie na pół dużą kartkę papieru wie, że już po czwartym – piątym złożeniu grubość „krawędzi” złożenia jest znacznie większa, niż płaskiej części. Jeśli więc nasze rozważania mają być realistyczne, powinniśmy raczej wyobrażać sobie kartki przecinane na pół przed złożeniem.

Często podaje się następującą zagadkę: jaka gruba będzie kartka zwykłego papieru, którą 32-krotnie złożymy na pół? Dość łatwo można dojść do zaskakującej odpowiedzi: kartka może przeszkadzać w locie sztucznym satelitom Ziemi! Istotnie, oszacujmy liczbę 2^{32} podobną metodą, jak użyta w poprzednim przykładzie. 2^{30} to w przybliżeniu 10^9, czyli miliard. Grubość kartki to około jedna dziesiąta milimetra (bo dwustustronicowa książka ma około centymetra grubości), czyli 10^{-4} m. Zatem złożona kartka będzie miała grubość

$$d = 4 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4}\ \text{m} = 4 \cdot 10^5\ \text{m} = 400\ \text{km},$$

a właśnie na takiej wysokości spotykamy pierwsze sztuczne satelity.

Jak już jednak wspomniano, nie jest to zadanie realistyczne. Jeśli kartkę składamy 32 razy, każdy bok zmniejszy się o połowę szesnaście razy. 2^{16} to ponad 60 000, więc kartka o boku długości trzydziestu centymetrów (jak zwykła kartka z bloku) „skróci się” do 300/60 000 = 1/200 milimetra. Oczywiście tak małych kawałeczków papieru nie moglibyśmy otrzymać przez ręczne przecinanie kartki, a nawet zobaczyć gołym okiem.

Zadanie można jednak „urealnić” biorąc do składania arkusz o boku 1 metra i przecinając na pół dwadzieścia razy (każdy bok dziesięć razy). Skoro $2^{10} \cong 10^3$, dostaniemy

$$N \cong 10^3 \cdot 10^3 = 10^6$$

czyli milion kwadracików o boku

$$a = 1\ \text{m} / 10^3 = 1\ \text{mm},$$

które ułożone jeden na drugim miałyby wysokość

$$h = 10^6 \cdot 10^{-4}\ \text{m} = 10^2\ \text{m},$$

czyli sto metrów – więcej, niż wieża kościoła Mariackiego w Krakowie! Też niezły wynik...

c) Wieża z kostek

Rynek krakowski, przy którym stoi wspomniany już kościół Mariacki, ma wymiary dwieście na dwieście metrów. Przed wymianą nawierzchni w latach siedemdziesiątych był on pokryty kostką kamienną, tzw. „kocimi łbami”. Były to bryłki o kształcie w przybliżeniu sześciennym i boku o długości około dziesięciu centymetrów (czyli 1 dm). Jak wysoka byłaby wieża ułożona z tych kostek?

Mnożąc rozmiary Rynku w decymetrach znajdziemy liczbę kostek

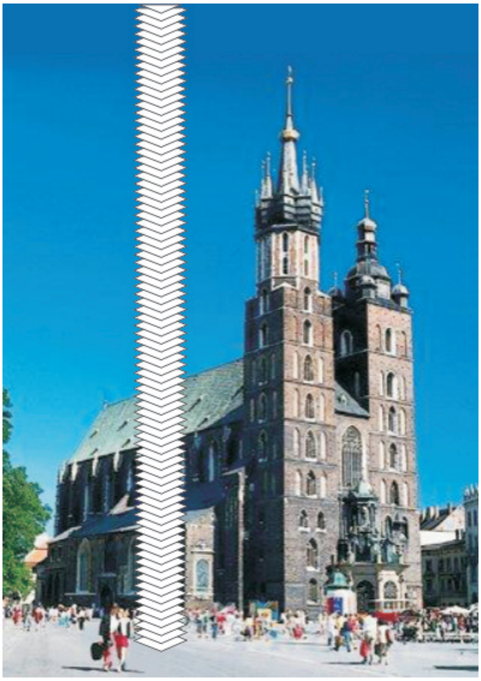
$$N = 200 \cdot 10 \cdot 200 \cdot 10 = 4 \cdot 10^6$$

czyli cztery miliony. Ułożona z nich wieża miałaby

$$h = 4 \cdot 10^6 \text{ dm} = 4 \cdot 10^5 \text{ m},$$

czyli czterysta kilometrów wysokości – tyle samo, co złożona kartka z poprzedniego przykładu. Pozornie obecny przykład jest bardziej realistyczny, bo wymaga „tylko” precyzyjnego układania kostek – gdyby łączyć je klejem i utrzymywać w pionie zakładanymi co kilkadziesiąt metrów odciągami linowymi, wieża taka mogłaby nawet stać. W rzeczywistości jednak na budowę takiej konstrukcji nie pozwoli siła ciężkości: już kilkaset kostek waży tyle, że wieża zaczęłaby się zagłębiać w ziemi. Nie pomoże nawet najmocniejszy fundament, bo po ustawieniu kilku tysięcy kostek zaczną się kruszyć te ustawione najniżej. Jak wiadomo, najwyższe budynki sięgają obecnie kilkuset metrów, ale ich konstrukcja opiera się na znacznie lepszych materiałach.

Zauważmy, że dwa ostatnie problemy pasują równie dobrze do poprzedniego rozdziału: „składanie” powierzchni Rynku (lub kartki) na wieżę zamienia bryłę o małej grubości i dużej powierzchni na bryłę o dużej grubości (wysokości) i małej powierzchni. Skoro objętość bryły nie zmienia się, wysokość musi rosnąć jak odwrotność kwadratu rozmiarów „płaskich”.



Uzupełnienie matematyczne: potęgowanie

Operacja potęgowania przy całkowitym wykładniku sprowadza się do operacji wielokrotnego mnożenia. Iloczyn ***n*** identycznych liczb ***x*** nazywamy ***n***-tą potęgą liczby ***x***

$$\underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \underset{\dots}{\dots} \cdot \underset{n.}{x} = x^n$$

Funkcje potęgowe $f(x) = x^n$ dla małych wartości n mają tradycyjne nazwy: x^2 nazywamy kwadratem, a x^3 sześcianem liczby x. Naturalnie $x^1 = x$.

Łatwo można udowodnić kilka ważnych własności funkcji potęgowych. Jeśli pomnożymy przez siebie x^n i x^m, czyli iloczyny n i m identycznych czynników x, to otrzymamy oczywiście iloczyn $n + m$ identycznych czynników

$$(\underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \dots \cdot \underset{n}{x}) \cdot (\underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \dots \cdot \underset{m}{x}) = \underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \dots \cdot \underset{m+n.}{x}$$

Zatem

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m},$$

czyli iloczyn potęg liczby x z dwoma (na ogół różnymi) wykładnikami daje potęgę o wykładniku równym sumie tych wykładników. Mówimy zwykle krótko, że przy mnożeniu potęg wykładniki dodają się.

Jeśli własność ta ma być zachowana dla $n = 0$, należy przyjąć, że $x^0 = 1$. Wtedy (i tylko wtedy) pomnożenie dowolnej potęgi x przez x^0 nie zmieni tej potęgi, jak wynika z prawa mnożenia potęg.

Inna własność wynika z rozważenia wielokrotnego iloczynu m czynników, z których każdy równy jest x^n. Jest on oczywiście równoważny iloczynowi $m \cdot n$ czynników x. Zatem możemy napisać

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}.$$

Oznacza to, że m-ta potęga n-tej potęgi danej liczby jest równa $n \cdot m$-tej potędze tej liczby; przy potęgowaniu potęgi wykładniki mnożą się.

Łatwo sprawdzić, że prawa mnożenia i potęgowania potęg można uogólnić na ujemne wykładniki, jeśli odwrotność n-tej potęgi x oznaczymy przez ujemną potęgę

$$1 / x^n = x^{-n}.$$

Istotnie, iloczyn dodatniej i ujemnej potęgi będzie dany przez

$$x^n \cdot x^{-m} = x^n / x^m.$$

Jeśli $n > m$, to po uproszczeniu iloczynów z licznika i mianownika w liczniku zostanie $n - m$ czynników x. Jeśli $n < m$, to po uproszczeniu w mianowniku zostanie $m - n$ takich czynników. W obu przypadkach oznacza to, że prawą stronę równania można zapisać jako x^{n-m} zgodnie z prawem mnożenia potęg.

W tekście użyto dyskutowanych tu wzorów wyłącznie dla potęg dziesiątki i dwójki, czyli dla $x = 10$ oraz dla $x = 2$.

Krzysztof Fiałkowski